Арифметические операции в позиционных системах счисления

Правила выполнения арифметических операций в десятичной системе счисления известны и понятны. Эти же правила применяются и к другим системам счисления. Так как десятичная система является для нас более естественной, чем другие, то будем использовать ее как промежуточную при выполнении арифметических операций в других системах счисления.

Сложение. Сложение чисел выполняется по правилу: в каждом разряде производится сложение цифр слагаемых, если их сумма равна или больше основания системы счисления, то осуществляется перенос избытка (единицы) из соседнего младшего разряда в старший.

Рассмотрим простые примеры сложения в различных системах двух одноразрядных чисел.

В приведенных примерах второе слагаемое раскладывается на два числа так, чтобы первое в сумме с первым слагаемым дали «десяток», равный основанию системы счисления, тогда результат равен сумме «десятка» и остатка от второго слагаемого.

а) $70_{10} + 6_{10} = \underbrace{(7_{10} + 3_{10})}_{10_{10}} + 3_{10} = 10_{10} + 3_{10} = 13_{10}$;

б) $2_8 + 2_8 = \underbrace{(2_8 + 1_8)}_{10_8} + 1_8 = 10_8 + 1_8 = 11_8$;

в) $6_8 + 5_8 = \underbrace{(6_8 + 2_8)}_{10_8} + 3_8 = 10_8 + 3_8 = 13_8$;

г) $A_{16} + 9_{16} = \underbrace{(A_{16} + 6_{16})}_{10_{16}} + 3_{16} = 10_{16} + 3_{16} = 13_{16}$.

Приведем более сложные примеры сложения чисел в различных системах счисления.

а) $6_8+6_8+1_8=15_8$

$7_8+1_8=10_8$

$$\begin{array}{r} 67_8 \\ +\ 61_8 \\ \hline 150_8 \end{array}$$

б) $3_{16}+D_{16}+1_{16}=11_{16}$

$A_{16}+F_{16}=19_{16}$

$6_{16}+9_{16}=F_{16}$

$$\begin{array}{rccc} & 3 & A & 6_{16} \\ + & D & F & 9_{16} \\ \hline & 11 & 9 & F_{16} \end{array}$$

В этих примерах при сложении цифр поразрядно получаемые избытки переносятся влево, т. е. в старшие разряды.

Операции вычитания, умножения и деления рассмотрим на примерах.

Вычитание.

$$\begin{array}{rccc} & 1 & 7 & 10 \\ \hline - & 2 & 0 & 0_8 \\ & & 2 & 6_8 \\ \hline & 1 & 5 & 2_8 \end{array}$$

$10_8-6_8=2_8$

$7_8-2_8=5_8$

$$\begin{array}{rccc} & 1 & F & 10 \\ \hline - & 2 & 0 & 0_{16} \\ & & 2 & 6_{16} \\ \hline & 1 & D & A_{16} \end{array}$$

$10_{16}-6_{16}=A_{16}$

$F_{16}-2_{16}=D_8$

Умножение выполняется по обычному алгоритму перемножения чисел в столбик, и, как правило, надо знать или иметь таблицу умножения для определенной системы счисления.

В составлении таких таблиц нет необходимости, так как результаты, получаемые в десятичной системе, переводятся в другую систему счисления.

Пример.

$6_8 \times 5_8 = 30_{10} = 36_8 + 4_8 = 42_8$

$6_8 \times 6_8 = 36_{10} = 44_8$

$$\begin{array}{cccc} \times & 5 & 6_8 \\ & & 6_8 \\ \hline 4 & 2 & 4_8 \end{array}$$

$2 \times 5 = 10_{10} = 12_8 + 1_8 = 13_8$

$2 \times 6 = 12_{10} = 14_8$

$$\begin{array}{cccc} \times & 5 & 6_8 \\ & & 2_8 \\ \hline 4 & 2 & 4_8 \end{array}$$

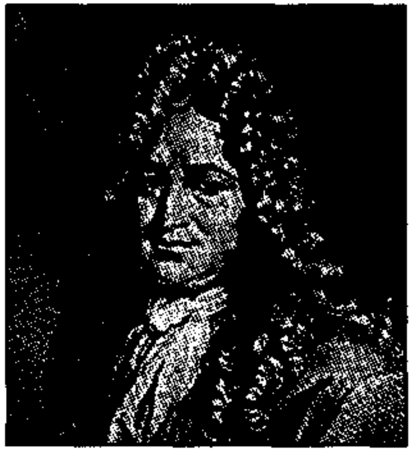
Деление выполняется по тем же правилам, что и деление углом в десятичной системе.

Двоичная арифметика

Официальное рождение двоичной арифметики связанно с именем Г. В. Лейбница, опубликовавшего в 1703 г. статью, в которой он рассмотрел правила выполнения арифметических действий над двоичными числами.

Правила выполнения арифметических действий над двоичными числами задаются таблицами двоичных сложения, вычитания и умножения.

ИНФОРМАТИКА В ЛИЦАХ



ЛЕЙБНИЦ Готфрид Вильгельм (1 июля 1646, Лейпциг — 14 ноября 1716, Ганновер), немецкий философ, математик, физик, языковед. Предвосхитил принципы современной математической логики («Об искусстве комбинаторики», 1666). Создал первую механическую счетную машину, способную производить сложение, вычитание, умножение и деление. Независимо от Ньютона создал дифференциальное и интегральное исчисление и заложил основы двоичной системы счисления.

Таблица двоичного сложения	Таблица двоичного вычитания	Таблица двоичного умножения
$0+0=0$ $0+1=1$ $1+0=1$ $1+1=10$	$0-0=0$ $1-0=1$ $1-1=0$ $10-1=1$	$0\times0=0$ $0\times1=0$ $1\times0=0$ $1\times1=1$

При сложении двоичных чисел в каждом разряде производится сложение цифр слагаемых и перенос единицы из соседнего младшего разряда, если он имеется, т.е. необходимо учитывать, что 1+1 дают нуль в данном разряде и единицу переноса в старший разряд.

Пример. Выполните сложение и вычитание двоичных чисел:

```
   111
   101101
+   10110
  -------
  1000011
            1+0=1
            1+0=1
            1+1=10
            1+1=10
            1+1=10
            1+1=10
```

```
  010 0 110
 _ 101001
    10110
  -------
    10011
            1-0=1
            10-1=1
            1-1=0
            0-0=0
            10-1=1
```

При вычитании двоичных чисел в данном разряде при необходимости занимается 1 из старшего разряда. Эта занимаемая единица равна двум единицам предшествующего младшего разряда.

Умножение двоичных чисел производится по тем же правилам, что и для десятичных с помощью таблиц двоичного умножения и сложения.

Пример.

```
   ×101101
      1011
  --------
    101101
   101101
 + 000000
 101101
 ---------
 111101111
```


Деление двоичных чисел производится по тем же правилам, что и десятичных. При этом используются таблицы двоичного умножения и вычитания.

Пример.

```
 _101010 | 110
  110    |-----
  ----   | 111
 _1001
   110
  ----
 _ 110
   110
  ----
     0
```

В вычислительной технике для записи чисел также используют 16-разрядный формат (полуслово), 32-разрядный формат (машинное слово) и 64-разрядный формат (двойное слово).